Liceul Teoretic „Grigore Moisil” Tulcea
Str. 1848 nr.7, Cod poștal: 820175
Telefon/fax: 0240 / 533541
e-mail: liceulgrigoremoisiltl@gmail.com

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA PE ȘCOALĂ

31 ianuarie 2024

CLASA a V-a

Subiectul 1

a) Calculați suma numerelor naturale nenule care dau, prin împărțire la 12, restul egal cu triplul câtului.
b) Arătați că produsul oricăror două numere naturale pare consecutive este multiplu de 8.

Subiectul 2

Se consideră numerele naturale $a=4^{1012}+2\cdot 8^{674}+2^{2023}$ și $b=9^{15}\cdot 27^{440}$.

a) Demonstrați că cele două numere sunt cuburi perfecte.
b) Comparați numerele *a* și *b*.

Subiectul 3

Fie *n* un număr natural astfel încât numărul 5^n+3 să fie pătrat perfect. Arătați că $5^{5^n}+3$ este cub perfect.

Subiectul 4

Numerele $1,\ 2,\ 2^2, 2^3, \ldots, 2^8$ se așează într-o tablă pătrată 3x3, ca în figură, astfel încât produsele numerelor de pe fiecare linie (orizontală) și respectiv coloană (verticală) să fie egale.

a) Arătați că acest produs este și pătrat perfect și cub perfect.
b) Indicați, printr-un desen, o posibilă aranjare în tablă a celor 9 numere, care să respecte proprietatea din enunț.

<u>**Notă:**</u> **Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se notează cu 0-7 puncte. Timpul efectiv de lucru este de 120 minute.**

DIRECTOR,

Prof. Camelia IVANOV

Liceul Teoretic „Grigore Moisil” Tulcea
Str. 1848 nr.7, Cod poștal: 820175
Telefon/fax: 0240 / 533541
e-mail: liceulgrigoremoisiltl@gmail.com

BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE – clasa a V-a

NUMĂR SUBIECT	SOLUȚIE / BAREM	PUNCTAJ
Subiectul 1/a **3 puncte**	Dacă n este un astfel de număr, avem, conform enunțului, $n=12c+r$, cu $r\le 11$ și $r=3c$.	**1 p**
	Obținem $n=15c$ și cum $r=3c\le 11$, deducem că c poate fi 0, 1, 2, sau 3.	**1 p**
	Pentru aceste valori ale lui c rezultă $n=0$, care nu convine, sau n este 15, 30 sau 45. Suma acestor valori este $S=15+30+45=90$.	**1 p**
Subiectul 1/b **4 puncte**	Două numere pare consecutive sunt de forma $2n$ și $2n+2$, cu n număr natural oarecare. Deci produsul lor este $P=2n(2n+2)=4n(n+1)$.	**2 p**
	P este multiplu de 8 doar dacă $n(n+1)$ este par, adică divizibil cu 2,	**1 p**
	adevărat, căci n și $n+1$ fiind consecutive, unul e par, iar celălalt e impar, deci produsul lor este număr par.	**1 p**
Subiectul 2/a **4 puncte**	Obținem $a=4^{1012}+2\cdot 8^{674}+2^{2023}=2^{2024}+2^{2023}+2^{2023}=2^{2025}=\left(2^{675}\right)^3$, deci e cub perfect.	**2 p**
	Avem $b=9^{15}\cdot 27^{440}=3^{30}\cdot 3^{1320}=3^{1350}=\left(3^{450}\right)^3$, deci și b este cub perfect.	**2 p**
Subiectul 2/b **3 puncte**	La punctul a) s-a obținut $a=2^{2025}$, deci $a=2^{2025}=\left(2^3\right)^{675}=8^{675}$ și $b=3^{1350}$, adică $b=3^{1350}=\left(3^2\right)^{675}=9^{675}$.	**2 p**
	Deducem în final că $a<b$.	**1 p**
Subiectul 3 **7 puncte**	Dacă n ar fi nenul, atunci $u\left(5^n+3\right)=u\left(5^n\right)+3=5+3=8$, deci nu poate fi pătrat perfect, ceea ce este fals.	**4 p**
	Prin urmare $n=0$, deci $5^n+3=5^0+1=4$, care este pătrat perfect.	**2 p**
	Rezultă în final că numărul $5^{5^n}+3=5^{5^0}+3=5^1+3=8=2^3$ e cub perfect.	**1 p**
Subiectul 4/a **4 puncte**	Produsul P al tuturor celor 9 elemente din tablă este egal cu $P=1\cdot 2\cdot 2^2\cdot 2^3\cdot\ldots\cdot 2^8=2^{0+1+2+\ldots+8}=2^{(8\cdot 9):2}=2^{36}$.	**1 p**
	Dacă P_1, P_2 și P_3 sunt produsele numerelor de pe prima, a doua și respectiv a treia linie (sau coloană), atunci, din enunț, rezultă $P_1=P_2=P_3$ și $P_1\cdot P_2\cdot P_3=P=2^{36}$, deci $\left(P_1\right)^3=P=2^{36}=\left(2^{12}\right)^3$, adică $P_1=P_2=P_3=2^{12}$, și cum $2^{12}=\left(2^6\right)^2=\left(2^4\right)^3$ concluzia reiese imediat.	**3 p**
Subiectul 4/b **3 puncte**	O posibilă aranjare a celor 9 numere în tablă este: $\begin{array}{\|c\|c\|c\|}\hline 2^1 & 2^6 & 2^5 \\ \hline 2^3 & 2^2 & 2^7 \\ \hline 2^8 & 2^4 & 2^0 \\ \hline\end{array}$	**3 p**

DIRECTOR,

Prof. Camelia IVANOV